Ασκήσεις Γενικής Μετεωρολογίας

Ατμοσφαιρική Πίεση Γεωδυναμικό

Άσκηση 1.6: Μεταβολή της Πίεσης σε Ομογενή Ατμόσφαιρα

Να βρεθεί το ύψος στο οποίο η πίεση γίνεται μηδέν για ομογενή ατμόσφαιρα με επιφανειακή πίεση P_o = 1000 mb και επιφανειακή θερ/σία αέρος 26°C. Να υπολογιστεί επίσης το ύψος στο οποίο η πίεση γίνεται το μισό της επιφανειακής.

Σε μια ομογενή ατμόσφαιρα ισχύουν:

n = m/MB
και ρ = m/V

$$dP = -\rho g dz \qquad \text{(υδροστατική)}$$

Η τιμή της πυκνότητας του αέρα παραμένει σταθερή και είναι ανεξάρτητη με το ύψος επομένως η ατμοσφαιρική πίεση σε κάποια στάθμη μιας κατακόρυφης ατμοσφαιρικής στήλης οφείλεται μόνο στο βάρος, ανά μονάδα επιφάνειας, που ασκεί ο ευρισκόμενος αέρας πάνω από αυτή τη στάθμη.

Άσκηση 1.6: Μεταβολή της Πίεσης σε Ομογενή Ατμόσφαιρα

Από τη σχέση $dP = -\rho g dz$ (υδροστατική)

προκύπτει εύκολα ότι $(P_0 - P_Z) = \rho g\,(z - 0)$

επομένως $$z = \frac{P_0 - P_Z}{\rho g} \quad (1)$$

α) για $P_Z = 0$ η (1) γράφεται $z = \frac{P_0}{\rho g}$ και σύμφωνα με την

καταστατική εξίσωση γα την περίπτωση του ξηρού ατμοσφαιρικού αέρα $P=\rho R_\alpha T$ προκύπτει τελικά ότι

$$z = \frac{\rho R_\alpha T_0}{\rho g} = \frac{287 * 299}{9.81} = 8.747{,}5m$$

Άσκηση 1.6: Μεταβολή της Πίεσης σε Ομογενή Ατμόσφαιρα

β) για $P_Z = ½\ P_0$

$$z = \frac{P_0 - \frac{1}{2}P_0}{\rho g} = \frac{\frac{1}{2}P_0}{\rho g} = \frac{\frac{1}{2}\rho R_\alpha T_0}{\rho g} \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{\frac{1}{2}289 * 299}{9.81} = \frac{1}{2}8.747{,}5m = 4373{,}7m$$

Άσκηση 1.9: Γεωδυναμικό Στοιχεία Θεωρίας

Μεταβολή της ατμοσφαιρικής πίεσης με το ύψος: (άσκηση 1.4)

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R_a T}dz \quad \text{ή} \quad d(\ln P) = -\frac{\bar{g}}{R_a T}dz$$

Ολοκληρώνοντας την από το ύψος (0) μέχρι Z και θεωρώντας αντί του T το $\overline{T}$ του ατμοσφαιρικού αυτού στρώματος ύψους Z και με την παραδοχή βέβαια, ότι τα g και Ra είναι σταθερά έχουμε:

$$\int_{P_0}^{P_z} d(\ln p) = -\frac{\bar{g}}{R_a T}\int_0^z dz \qquad (1)$$

και $$\boxed{P_z = P_0 \exp\left(-\frac{\bar{g}}{R_a \overline{T}}z\right)}$$

Όπου:

P_o: η πίεση στην επιφάνεια της θάλασσας.

Άσκηση 1.9: Γεωδυναμικό
Στοιχεία Θεωρίας

Αν Z_1, Z_2 και P_1, P_2 είναι τα ύψη και οι πιέσεις αντίστοιχα δύο ισοβαρικών επιφανειών, τότε η σχέση **(1)** μπορεί να γραφεί:

$$\int_{P_1}^{P_2} d(\ln p) = -\frac{g}{R_a \overline{T}} \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$(z_2 - z_1) = \Delta z = \frac{R_a \overline{T}}{g} \ln \frac{P_1}{P_2} \qquad \textbf{(2)}$$

Άσκηση 1.9: Γεωδυναμικό
Στοιχεία Θεωρίας

Η σχέση **(2)** δίνει την υψομετρική διαφορά (ΔΖ) δύο ισοβαρικών επιφανειών. Αν η πρώτη ισοβαρική επιφάνεια είναι αυτή της Μ.Σ.Θ με πίεση P_o η **(2)** γράφεται:

$$z = \frac{R_a \overline{T}}{g} \ln \frac{P_0}{P} \qquad \text{ή}$$

$$z = 29{,}3\, \overline{T} \ln \frac{P_0}{P} = 67{,}4\, \overline{T} \log \frac{P_0}{P} \qquad \textbf{(3)}$$

Προφανώς η **(3)** είναι μια "**υψομετρική εξίσωση**" καθότι δίνει το ύψος Ζ μιας ισοβαρικής επιφάνειας, πίεσης P, όταν είναι γνωστά τα: P_o και $\overline{T}$.

Οι σχέσεις **(2) και (3)** δείχνουν ότι δύο ισοβαρικές επιφάνειες θα απέχουν τόσο περισσότερο όσο η θερμοκρασία ($\overline{T}$) του στρώματος μεταξύ τους αυξάνει.

Άσκηση 1.9: Γεωδυναμικό
Στοιχεία Θεωρίας

Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι: το έργο (W) που παράγεται κατά την ανύψωση της μονάδας μάζας (m=1), μέσα στο πεδίο βαρύτητας της Γης, κατά το στοιχειώδες ύψος dz είναι:

$$dw = g dz \qquad (4)$$

Ολοκληρώνοντας την (4) από το ύψος (0) μέχρι z έχουμε:

$$G = \int_0^z g\,dz = \bar{g}\,z \qquad (5)$$

Η σχέση (5) δίνει το Δυναμικό του Πεδίου βαρύτητας της Γης, ή απλά το **Γεωδυναμικό (G)**, σε κάποιο σημείο μέσα στην ατμόσφαιρα, ύψους z.

Άσκηση 1.9: Γεωδυναμικό
Στοιχεία Θεωρίας

Το Γεωδυναμικό (G) στη Μ.Σ.Θ (z = 0) είναι προφανώς μηδέν. Διαιρώντας την σχέση (5) με τον "αδιάστατο" αριθμό 9,8 έχουμε:

$$H = \frac{G}{9{,}8} = \frac{\bar{g}}{9{,}8}\,z \qquad (6)$$

Η νέα αυτή παράμετρος Η ονομάζεται στην Μετεωρολογία "**γεωδυναμικό ύψος**". Προφανώς, το γεωδυναμικό ύψος (Η) και το γεωμετρικό ύψος (z) έχουν διαφορετικές "διαστάσεις". Μπορεί δηλ. να λέγονται "ύψη", όμως το μεν Η εκφράζει ενέργεια το δε z απλά μήκος. Μονάδα της νέας παραμέτρου Η είναι το"**γεωδυναμικό μέτρο**" gpm (geopotential meter). Ισχύει:

$$1 \text{ gpm} = 9{,}8 \text{ J/Kgr}$$

Η αριθμητική αντιστοιχία των Η και z εξαρτάται προφανώς (σχέση (6)) από την τιμή της παραμέτρου ($\bar{g}$/9,8). Αν π.χ θεωρήσουμε $\bar{g}$ = 9,8m/sec^2 τότε προκύπτει: 1gpm → 1m.

Άσκηση 1.9: Γεωδυναμικό
Στοιχεία Θεωρίας

Συνεπώς, μέσα στην τροπόσφαιρα τουλάχιστον, είναι αληθές να λέμε 1gpm αντιστοιχεί με 1 m ή γενικότερα να θεωρούμε τα γεωδυναμικά ύψη και ως γεωμετρικά ύψη. Έτσι, σε αντιστοιχία η σχέση **(3)** μπορεί να γραφτεί και για το γεωδυναμικό ύψος ως εξής:

$$\boxed{H = 29{,}3\,\overline{T}\ln\frac{P_0}{P}} \qquad \textbf{(7)}$$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, στην ελεύθερη ατμόσφαιρα,που κάποια στιγμή έχουν το ίδιο γεωδυναμικό είναι μια επιφάνεια που λέγεται "**ισογεωδυναμική επιφάνεια**".

Άσκηση 1.9: Γεωδυναμικό

Ποιά είναι η μεταβολή της μέσης θερ/σίας $(d\overline{T})$ του στρώματος: επιφάνεια εδάφους – 500 hPa αν κάποια στιγμή το γεωδυναμικό ύψος της στάθμης των 500 hPa αυξηθεί κατά 50 gpm και η πίεση στην επιφάνεια του εδάφους αυξηθεί επίσης κατά 5 hPa. (δίδονται: $\overline{T} = 260°K$ και $P_o = 1000$ hPa)

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, για το γεωδυναμικό Η ισχύει:

$$H = 29{,}3\,\overline{T}\ln\frac{P_0}{P}$$

Η άσκηση αναφέρεται σε μεταβολές και έτσι διαφορίζοντας την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι:

Άσκηση 1.9: Γεωδυναμικό

$$dH = 29.3 d\overline{T} \ln\frac{P_o}{P} + 29.3\overline{T} d(\ln\frac{P_o}{P})$$

$$dH = 29.3 d\overline{T} \ln\frac{P_o}{P} + 29.3\overline{T} d(\ln P_o - \ln P)$$

Όμως

P= σταθερή και έτσι dlnP=0

$$dH = 29.3 d\overline{T} \ln\frac{P_o}{P} + 29.3\overline{T} d(\ln P_o)$$

$$dH = 29.3 d\overline{T} \ln\frac{P_o}{P} + 29.3\overline{T} \frac{dP_o}{P_o}$$

Άσκηση 1.9: Γεωδυναμικό

Εφαρμογή για:

$$dH = 50 gpm, \Delta P_o = 5mb, P_o = 1000mb, P = 500mb$$

άρα:

$$50 = 29.3 * d\overline{T} * \ln 2 + 29.3 * 260 * \frac{5}{1000}$$

$$50 = 29.3 * d\overline{T} * 0.693 + 38.09$$

$$d\overline{T} = 0.59^o K = 0.59^o C$$

Άσκηση 1.10: Γεωδυναμικό

Κατά πόσο πρέπει να μεταβληθεί η πίεση στην επιφάνεια του εδάφους ώστε παρά την αύξηση της μέσης θερ/σίας του στρώματος: έδαφος – 700 hPa, κατά 5°C, το γεωδυναμικό ύψος της στάθμης των 700 hPa να παραμείνει σταθερό. (δίδονται: $\overline{T} = 285°K$ και $P_o = 995hPa$)

Ισχύει η σχέση: $$\boxed{dH = 29.3 d\overline{T} \ln\frac{P_o}{P} + 29.3\overline{T}\frac{dP_o}{P_o}}$$

Αφού

H = σταθερό

dH = 0

$$0 = 29.3 * 5 * \ln\frac{995}{700} + 29.3 * 285 * \frac{dP_o}{995}$$

$$0 = 29.3 * 5 * 0.35 + 29.3 * 285 * \frac{dP_o}{995}$$

$$0 = 51.27 + 8.39 * dP_o$$

$$dP_o = -6.1 hPa$$

Άσκηση 1.11: Γεωδυναμικό

Κατά πόσο πρέπει να μεταβληθεί η πίεση στην επιφάνεια του εδάφους ώστε το ύψος της στάθμης των 600 hPa να ελαττωθεί κατά 25 gpm και η μέση θερ/σία του στρώματος: έδαφος – 600hPa να ελαττωθεί κατά 4°C (δίδονται $\overline{T} = 260°K$ και $P_o = 990hPa$)

Ισχύει η σχέση: $$\boxed{dH = 29.3 d\overline{T} \ln\frac{P_o}{P} + 29.3\overline{T}\frac{dP_o}{P_o}}$$

$$-25 = 29.3 * (-4) * \ln\frac{990}{600} + 29.3 * \overline{T} * \frac{dP_o}{P_o}$$

$$-25 = -58.6 + 7.69 * dP_o$$

$$dP_o = 4.37 hPa$$

Άσκηση 1.12: Οριζόντια Βαθμίδα Γεωδυναμικού

Η οριζόντια βαροβαθμίδα στο ύψος της στάθμης των 700 hPa κάποια στιγμή είναι: 1 hPa/100km. Αν η θερμοκρασία του αέρα στη στάθμη αυτή είναι: –5°C να υπολογιστεί η οριζόντια βαθμίδα του γεωδυναμικού στη στάθμη αυτή. (δίδεται: R_α = 287 J kgr^{-1} $grad^{-1}$)

Ως γνωστόν, η οριζόντια βαροβαθμίδα συμβολίζεται: dP/dx

Ομοίως, η οριζόντια βαθμίδα του γεωδυναμικού G: dG/dx

$$dP = -\rho g dz$$ (Υδροστατική)

$$\frac{dP}{dx} = -\rho g \frac{dz}{dx}$$

Όμως:

$$G = gz \Rightarrow dG = gdz \Rightarrow dz = \frac{dG}{g}$$

$$\frac{dP}{dx} = -\rho g \frac{dG}{gdx} \Rightarrow \frac{dP}{dx} = -\rho \frac{dG}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{dG}{dx} = -\frac{dP}{\rho dx}}$$

Δεδομένα:

* οριζόντια βαροβαθμίδα

*πίεση

*θερμοκρασία

ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ?

Άσκηση 1.12: Οριζόντια Βαθμίδα Γεωδυναμικού

$P=\rho R_\alpha T$ και επομένως $\rho=P/R\alpha T$

$$\frac{dG}{dx} = -\frac{R_\alpha T}{P}\frac{dP}{dx}$$

$$\frac{dG}{dx} = -\frac{287*268}{700}\frac{1}{100} = -\frac{109.9JKgr^{-1}}{100Km} = -1.099\frac{JKgr^{-1}}{Km}$$

$$1gpm = 9.8JKgr^{-1}$$

$$\frac{dG}{dx} = -\frac{\frac{109.9}{9.8}JKgr^{-1}}{100Km} = -\frac{\frac{109.9}{9.8}gpm}{100Km} = -0.112\frac{gpm}{Km}$$

Άσκηση 1.13: Υπολογισμός Θερμοκρασίας σε μια στάθμη από το πάχος στρώματος και τη θερμοβαθμίδα του.

Να βρεθεί γενική σχέση με την οποία να προσδιορίζεται η θερ/σία της στάθμης των 1000 hPa όταν είναι γνωστά: α) το πάχος του στρώματος: 1000/500 hPa και η θερμοβαθμίδα του στρώματος αυτού.

$$\Delta z = \frac{R_a \overline{T}}{g} \ln \frac{P_1}{P_2} \Leftrightarrow \Delta z = 29.3\,\overline{T} \ln \frac{P_1}{P_2}$$

Υψομετρική Διαφορά δυο ισοβαρικών επιφανειών
Πάχος Στρώματος

$$\Delta z = 29.3\,\overline{T} \ln \frac{1000}{500} = 29.3\,\overline{T} \ln 2 = 20.3\,\overline{T}$$

$$\overline{T} = \frac{\Delta z}{20.3}$$

Άσκηση 1.13: Υπολογισμός Θερμοκρασίας σε μια στάθμη από το πάχος στρώματος και τη θερμοβαθμίδα του.

Να βρεθεί γενική σχέση με την οποία να προσδιορίζεται η θερ/σία της στάθμης των 1000 hPa όταν είναι γνωστά: α) το πάχος του στρώματος: 1000/500 hPa και η θερμοβαθμίδα του στρώματος αυτού.

$$\Delta z = \frac{R_a \overline{T}}{g} \ln \frac{P_1}{P_2} \Leftrightarrow \Delta z = 29.3\,\overline{T} \ln \frac{P_1}{P_2}$$

Υψομετρική Διαφορά δυο ισοβαρικών επιφανειών
Πάχος Στρώματος

$$\Delta z = 29.3\,\overline{T} \ln \frac{1000}{500} = 29.3\,\overline{T} \ln 2 = 20.3\,\overline{T}$$

$$\overline{T} = \frac{\Delta z}{20.3}$$

Άσκηση 1.13: Υπολογισμός Θερμοκρασίας σε μια στάθμη από το πάχος στρώματος και τη θερμοβαθμίδα του.

Θερμοβαθμίδα: $$\gamma = -\frac{dT}{dz}$$

Έστω T_1 η ζητούμενη θερμοκρασία στα 1000hPa. Για τη θερμοβαθμίδα του στρώματος ισχύει:

$$\gamma = -\frac{\overline{T} - T_{1000}}{\frac{\Delta z}{2}} = 2\frac{T_{1000} - \overline{T}}{\Delta z} = 2\frac{T_{1000} - \frac{\Delta z}{20.3}}{\Delta z} \Leftrightarrow$$

$$\gamma \Delta z = 2T_{1000} - \frac{1}{10.1}\Delta z \Leftrightarrow$$

$$2T_{1000} = (\gamma + \frac{1}{10.1})\,\Delta z \Leftrightarrow$$

$$\boxed{T_{1000} = \frac{1}{2}(\gamma + \frac{1}{10.1})\,\Delta z}$$

Άσκηση 1.14: Εφαρμογή της προηγούμενης σχέσης

Ποιά είναι η θερ/σία στη στάθμη των 1000 hPa όταν το πάχος του στρώματος: 1000/500 hPa είναι 5250m και η θερμοβαθμίδα του στρώματος αυτού είναι: 0,6°C/100m.

$$T_{1000} = \frac{1}{2}(\gamma + \frac{1}{10.1})\,\Delta z \Leftrightarrow$$

$$T_{1000} = \frac{1}{2}(0.006(^{o}C/m) + \frac{1}{10.1})\,5250(m) \Leftrightarrow$$

$$T_{1000} = 275.6^{o}K = 2.6^{o}C$$

Άσκηση 1.15: Εφαρμογή της προηγούμενης σχέσης

Να υπολογιστεί η θερ/σία της στάθμης των 500hPa αν το πάχος του στρώματος: 1000/500hPa είναι 5520m και η θερμοβαθμίδα του στρώματος αυτού είναι 0,7°C/100m.

$$T_{1000} = \frac{1}{2}(\gamma + \frac{1}{10.1})\,\Delta z \Leftrightarrow$$

$$T_{1000} = \frac{1}{2}(0.007(^{o}C/m) + \frac{1}{10.1})\,5520(m) \Leftrightarrow$$

$$T_{1000} = 292.6^{o}K$$

Από τη σχέση της θερμοβαθμίδας

$$\gamma = -\frac{dT}{dz}$$

ότι η θερμοκρασία στα 500hPa θα είναι:

$T_{500} = T_{1000} - \gamma\Delta z$

Επομένως $T_{500} = 292.6 - 0.007 * 5520 = 254^{o}\,K = -19^{o}\,C$

Άσκηση 1.15: Εφαρμογή της προηγούμενης σχέσης Β΄ τρόπος

Θερμοβαθμίδα: $\gamma = -\frac{dT}{dz}$

Έστω T_{500} η ζητούμενη θερμοκρασία στα 500hPa. Για τη θερμοβαθμίδα του στρώματος ισχύει:

$$\gamma = -\frac{T_{500} - \overline{T}}{\frac{\Delta z}{2}} = 2\frac{\overline{T} - T_{500}}{\Delta z} = 2\frac{\frac{\Delta z}{20.3} - T_{500}}{\Delta z} \Leftrightarrow$$

$$T_{500} = \frac{1}{2}(\frac{1}{10.1} - \gamma)\,\Delta z$$

$$T_{1000} = \frac{1}{2}(\gamma + \frac{1}{10.1})\,\Delta z$$